Mathematik-Prüfungstraining

7. Thema: Analytische Geometrie

Zusammenfassung des Stoffs

1. Vektoren

   Ein Vektor ist eine *Menge* von Pfeilen mit bestimmter Länge und Richtung. Daher hat ein Vektor keine festgelegte Lage im Koordinatensystem, insbesondere keinen Aufpunkt. Auch wenn man einen Vektor z.B. als $\overrightarrow{AB}$ darstellen kann, bedeutet dies nicht, dass er bei A beginnt und bei B endet, sondern dass er, *wenn* er auf A beginnt, *dann* auch auf B endet.

   Daher können zwei Vektoren einfach graphisch addiert werden, indem man die Pfeile hintereinander hängt und dann vom Fuß des ersten direkt zur Spitze des zweiten Vektors geht. Rechnerisch: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

   Ein negatives Vorzeichen vor dem Vektor dreht dessen Richtung um: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

   Ein konstanter Vorfaktor vor dem Vektor verlängert/verkürzt ihn entsprechend: $\frac{1}{3} \cdot \binom{3}{6} = \binom{1}{2}$ (S-Multiplikation)

   Ein Punkt P kann durch seinen Ortsvektor $\vec{P}$ festgelegt werden. Dies ist eine Kurzschreibweise für $\overrightarrow{OP}$, wobei O für Origin (Ursprung), also den Punkt $O(0|0|0)$ steht. Man muss unterscheiden zwischen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ortsvektor $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

   Den Vektor $\overrightarrow{AB}$ von A nach B kann man aus beiden Ortsvektoren bilden: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \vec{B} = \vec{B} - \vec{A}$.

   Die Länge (den Betrag) eines Vektors rechnet man aus mit Hilfe des Satz des Pythagoras: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 (+a_3^2)}$

   Der zu einem Vektor $\vec{a}$ gehörende Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ ist der Vektor mit gleicher Richtung, aber Länge 1: $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

2. Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

   Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$.

   Diese Definition wird aber eher in der umgekehrten Richtung interessant, wenn man nämlich den Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen möchte: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

   Das Skalarprodukt berechnet man einfach über die Koordinaten: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (a_3) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (b_3) \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 (+a_3 b_3)$

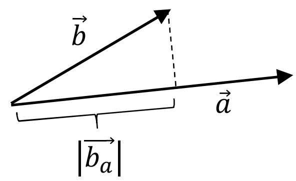
   Merke: Das Ergebnis des *Skalar*produkts ist ein Skalar, also eine Zahl, *kein Vektor*!

   Stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, so gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

   Zeigen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in die gleiche Richtung, so gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Insbesondere also $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$ und $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$.

   <u>Senkrechte Projektion:</u> Das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{b}$ mit einem Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ ergibt die Länge des senkrecht auf die Richtung von $\vec{a}$ projizierten Vektors $\overrightarrow{b_a}$.

   Dies ist insbesondere später für Abstandsbestimmungen nützlich.

3. Vektorprodukt (Kreuzprodukt) und Flächeninhalt

   Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

   Achtung: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

   Das Ergebnis des *Vektor*produkts ist wieder ein *Vektor*.

   Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht $\perp$ auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$. Dies ist z.B. praktisch zur Bestimmung des Normalenvektors einer Ebene.

   $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
   Somit ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gleich $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

   Dann kann man sich auch leicht merken, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$.

4. Spatprodukt und Volumen

   Das Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist definiert als $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$.

   Das Ergebnis des Spatprodukts ist ein Skalar (eine Zahl), kein Vektor.
   Es gibt die Maßzahl des Volumens des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats an. Das Volumen des zugehörigen Prismas beträgt $\frac{1}{2}V_{\text{Spat}}$, das Volumen der zugehörigen Pyramide $\frac{1}{3}V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}}$.

   Somit kann man sich auch leicht merken, dass die Reihenfolge der Vektoren keine Rolle spielt:
   $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \left|\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$ usw.

   Und dass das Spatprodukt dann 0 ist, wenn die drei Vektoren keinen Spat aufspannen, also linear abhängig sind.

5. Kreise und Kugeln

   Dies hat unmittelbar mit dem Abstand zweier Punkte zu tun.
   Ein Kreis (in 2D) bzw. eine Kugel (in 3D) ist die Menge aller Punkte X, die zu einem gegebenen Punkt M den gleichen Abstand $\left|\overrightarrow{MX}\right| = r$ haben.

   Damit in der Formel keine Wurzel (von der Betragsbildung) steht, wird sie meist quadratisch formuliert:
   $\left|\overrightarrow{MX}\right|^2 = \left(\vec{X} - \vec{M}\right)^2 = r^2$ bzw. in Koordinatenschreibweise: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2[+(x_3 - m_3)^2] = r^2$

6. Linearkombinationen und lineare (Un)abhängigkeit

   Eine Linearkombination aus zwei (drei) Vektoren ist ein Term der Form $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}\ (+c \cdot \vec{w})$.

   Zwei Vektoren heißen linear unabhängig, wenn sie nicht Vielfache voneinander sind. Dies kann man mit einem Blick anhand der Koordinaten erkennen.

   Drei Vektoren heißen linear unabhängig, wenn keiner der drei als Linearkombination der anderen beiden darstellbar ist. Dies ist nicht immer sofort zu sehen und sollte mit einem Gleichungssystem gezeigt werden. Wenn die drei Vektoren aber linear abhängig sind und man dies (zufällig) sieht, dann reicht es, dies zu demonstrieren.
   Bsp: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig, da $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Durch einen einzelnen Vektor lässt sich eine Gerade „aufspannen", wenn ein Aufpunkt gegeben ist.
   Im $\mathbb{R}^2$ sind höchstens 2 Vektoren linear unabhängig. Durch 2 lin.unabh.Vektoren lässt sich eine Ebene aufspannen.
   Im $\mathbb{R}^3$ sind höchstens 3 Vektoren linear unabhängig. Durch 3 lin.unabh.Vektoren lässt sich der Raum aufspannen.

7. Geraden

   Eine Gerade g ist die Menge aller Punkte X, die sich von einem Aufpunkt A aus durch das Vielfache (λ-fache) eines Richtungsvektors $\vec{u}$ erreichen lässt: $g\colon\ \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ (Parameterform).

   Sind zwei Punkte gegeben, nimmt man einen als Aufpunkt und den Differenzvektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor.

   Koordinatenform: $x_2 = mx_1 + t$ erhält man aus PF, indem man in $x_2 = a_2 + \lambda u_2$ das $\lambda = \frac{x_1 - a_1}{u_1}$ einsetzt.

   Um zu testen, ob ein Punkt P auf der Geraden g liegt, setzt man seine Koordinaten anstelle des $\vec{X}$ in die Geradengleichung ein und versucht, ein λ zu finden, das das resultierende Gleichungssystem löst. Gibt es kein solches λ, dann liegt der Punkt nicht auf g.

   <u>Spurpunkte:</u> Dies sind die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen. Um beispielsweise den Schnittpunkt einer Geraden mit der x_1x_2-Ebene zu bestimmen, interessiert man sich dafür, welchen Wert x_1 und x_2 haben, wenn x_3, also die Höhe über der x_1x_2-Ebene, gleich Null ist. Ansatz: $0 = a_3 + \lambda \cdot u_3$ (die x_3-Koordinate der Geradengleichung) nach λ auflösen. Dann dieses λ in die Geradengleichung einsetzen, um S_{12} zu erhalten.

   <u>Senkrechte Projektion einer Geraden in eine Koordinatenebene:</u> Anschaulich entspricht dies dem Schattenwurf einer Geraden, wenn man genau von oben auf die entsprechende Koordinatenebene leuchtet. Von oben betrachtet ist die „Höheninformation", d.h. die Koordinate, die mir entgegenläuft, irrelevant. Sie wird in der Geradengleichung Null gesetzt, somit drückt man die Gerade also in die entsprechende Ebene, in ihren Schatten, hinein.

   <u>Gegenseitige Lage von Geraden:</u> Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig? Wenn ja, dann sind die Geraden identisch oder parallel (durch Punktprobe (Einsetzen eines Aufpunkts in die andere Gerade) überprüfen). Wenn nein, dann schneiden sie sich oder liegen windschief, was sich durch das Lösen des Gleichungssystems $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ unterscheiden lässt.

8. Ebenen

Parameterform: $E\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$

Normalenform: in Vektordarst.: $E\colon \vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$ / in Koordinatendarst.: $E\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$

Hesse-Normalenform: VD: $E\colon \overrightarrow{n_0} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$ / KD: $E\colon \frac{1}{\pm\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$

Bei der HNF ist $\overrightarrow{n_0}$ so gerichtet (Vorzeichen), dass $\vec{n} \circ \vec{A} > 0$ ist, bzw. das VZ der Wurzel so, dass $\frac{n_0}{\pm\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} < 0$.

Umwandlung PF → NF: Berechne als einen möglichen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. $\vec{A}$ ist bereits bekannt. Somit resultiert gleich die VD; ist die KD gewünscht, wird das Skalarprodukt noch ausgeführt und die Konstanten zu n_0 zusammengefasst.

Umwandlung NF → PF: Suche zwei beliebige, aber linear unabhängige, Vektoren, für die $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$ wird. Der Aufpunkt $\vec{A}$ ist im Falle der VD bereits bekannt; im Falle der KD können zwei Koordinaten von $\vec{A}$ mehr oder weniger beliebig gewählt werden und die dritte Koordinate mittels der Ebenengleichung ausgerechnet werden.
In Sonderfällen (Ebene parallel zu ein oder zwei Koordinatenachsen, d.h. diese Koordinaten kommen in der Ebenengleichung in KD nicht vor), muss dies bei der Wahl des Aufpunkts berücksichtigt werden.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: Bsp. x_1-Achse: gesucht ist die x_1-Koordinate, für die $x_2 = x_3 = 0$ gilt. Also in PF $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einsetzen und λ und μ eliminieren. Oder in NF $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einsetzen und nach x_1 auflösen.

Spurgeraden: Schnittgeraden von E mit Koordinatenebenen. Bsp. x_1x_2-Ebene: Es muss $x_3 = 0$ gelten.
Also in PF dritte Gleichung $0 = x_3 = a_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3$ verwenden, um λ durch μ auszudrücken oder umgekehrt. Dies dann in PF einsetzen, und es resultiert eine Geradengleichung in Parameterform.
Oder in NF $x_3 = 0$ einsetzen und nach x_2 auflösen. Es resultiert eine Geradengleichung in Koordinatenform.

Lage von Geraden zu Ebenen: Hierfür ist die NF praktischer. Die Geradengleichung für $\vec{X}$ wird in die Ebenengleichung eingesetzt. Wenn dabei eine Gleichung für λ resultiert, dann kann durch dessen Berechnung der Schnittpunkt von g und E bestimmt werden. Fällt das λ heraus und ergibt sich eine wahre Aussage ($0 = 0$), so liegt die Gerade komplett in der Ebene und es gibt unendlich viele gemeinsame Punkte. Fällt das λ heraus und ergibt sich eine falsche Aussage (z.B. $1 = 0$), so liegt die Gerade parallel zur Ebene und es gibt keinen Schnittpunkt.

Gegenseitige Lage von Ebenen: Wenigstens eine der beiden Ebenen sollte in NF gegeben sein (notfalls umwandeln). Sind beide in NF gegeben, so kann man die Normalenvektoren vergleichen. Sind sie linear unabhängig, so schneiden sich die Ebenen in einer Gerade (hierzu wählt man eine der drei Koordinaten und ersetzt sie in den Ebenengleichungen durch λ; die anderen beiden Koordinaten kann man dann jeweils als Funktion von λ schreiben und erhält somit eine Geradengleichung in PF). Sind sie linear abhängig, so können die Ebenen identisch sein oder parallel liegen. Hierzu macht man die Punktprobe (setzt einen Punkt aus E in F ein oder umgekehrt).
Ist eine Ebene in NF, die andere in PF gegeben, so setzt man $\vec{X}$ aus der PF-Gleichung in die NF ein und erhält eine Gleichung für λ und μ. Eliminiert man hiermit einen der Parameter in der PF, so erhält man die Geradengleichung. Verschwinden λ und μ aus der Gleichung und ergibt sich eine wahre Aussage, so sind die Ebenen identisch, ergibt sich eine falsche Aussage, so liegen die Ebenen parallel.

9. Abstand

a) Punkt-Punkt: $d(P;Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

b) Punkt-Gerade: Hilfsebene $\perp g$ mit $\vec{n} = \vec{u}$ und Aufpunkt P; dann Schnittpunkt $g \cap E$ als Lotfußpunkt F; Abstand $d(P;g) = d(P;F)$

c) Punkt-Ebene: Bringe Ebene in HNF. Projiziere den Vektor $\overrightarrow{AP}$ vom Ebenenaufpunkt zum Punkt auf den Normalen-Einheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$: Abstand $d(P;E) = \overrightarrow{n_0} \circ \overrightarrow{AP}$.

d) Gerade-Gerade (windschief): Hilfsebene $\perp g$ und $\perp h$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ und Aufpunkt A (von g); dann Bestimmung des Abstands von B (Aufpunkt von h) und E: $d(g;h) = d(B;E) = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} \circ \overrightarrow{AB}$
(Projektion des Vektors $\overrightarrow{AB}$ auf den Normalen-Einheitsvektor, der auf beiden Geraden senkrecht steht)

e) Gerade-Ebene (parallel): Bestimme den Abstand des Geraden-Aufpunkts A von E: $d(g;E) = d(A;E)$

f) Ebene-Ebene (parallel): Bestimme den Abstand des Aufpunkts A von E zu F: $d(E;F) = d(A;F)$

10. Schnittwinkel

a) Gerade-Gerade: $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|v|}\right|$ (siehe Skalarprodukt)

b) Gerade-Ebene: $\cos(90° - \varphi) = \left|\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right|$

c) Ebene-Ebene: $\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|$ (wenn HNF gegeben ist, einfach Skalarprodukt der beiden $\overrightarrow{n_0}$)

Übungsaufgaben im Netz

Übungsaufgaben mit Lösungen auf http://www.raschweb.de

Wachhalten/Diagnostizieren-Aufgaben mit Lösungen auf
http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb1/modul4/basis/

Übungsaufgaben mit schrittweiser Hilfestellung und sofortiger Korrektur auf http://www.mathegym.de

Rechenregeln in Videoform erklärt, mit kleinen Zwischenfragen (Vorlesung zur Vorbereitung aufs Mathestudium, behandelt aber elementaren Schulstoff recht anschaulich und ausführlich): http://capira42.appspot.com

Original-Abituraufgaben mit Lösungen auf http://www.abiturloesung.de